Informatique Appliquée au Calcul Scientifique 2
Séance 13

Splines cubiques – matrice tridiagonale

Table des matières

I. Introduction aux splines

Les splines cubiques sont un outil mathématique puissant utilisé pour l'interpolation, c'est-à-dire pour estimer des valeurs entre des points de données connus. Elles sont particulièrement utiles parce qu'elles produisent des courbes lisses et continuelles qui passent par tous les points donnés, tout en minimisant l'effet de sursaut qui peut survenir avec d'autres méthodes d'interpolation comme les polynômes de degré élevé.

Une spline est une fonction définie par morceaux, où chaque morceau est une fonction polynomiale. Les splines cubiques sont des splines où chaque morceau est un polynôme de degré 3 (c'est-à-dire cubique).

Soient $(n+1)$ points d'interpolation de coordonnées $(x_i\,, f(x_i)\,)$ pour $i\ =\ 0, 1, 2, \cdots, n$.

Le but est de construire une fonction $S(x)$ telle que :

- $S(x)$ passe par chaque point de données, c'est-à-dire $S(x_i) = y_i$ pour chaque i.
- $S(x)$ est suffisamment lisse, c'est-à-dire que ses première et deuxième dérivées sont continues sur l'intervalle des points de données.

II. Construction

Pour chaque sous-intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, une spline cubique est définie comme un polynôme cubique :

$$P_i(x) = a_i(x - x_i)^3 + b_i(x - x_i)^2 + c_i(x - x_i) + d_i \quad (1)$$

où a_i, b_i, c_i et d_i sont des coefficients à déterminer pour chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$.

Conditions de continuité et de lissage

Pour garantir que la spline est continue et lisse, les conditions suivantes sont imposées :

1. **Continuité en chaque point** : Les polynômes cubiques doivent passer par les points de données :

   $$P_i(x_i) = f(x_i) \ \text{ et } P_i(x_{i+1}) = f(x_{i+1}) \text{ pour } i\ =\ 1, 2, \cdots, n-1\,;$$

2. **Continuité des premières dérivées** : Les dérivées premières doivent être continues en chaque point x_i :

   $$P_i'(x_i) = P_{i+1}'(x_i) \text{ pour } i\ =\ 1, 2, \cdots, n-1\,;$$

3. **Continuité des deuxièmes dérivées** : Les dérivées secondes doivent être continues en chaque point x_i :

   $$P_i''(x_i) = P_{i+1}''(x_{i+1}) \text{ pour } i\ =\ 1, 2, \cdots, n-1\,;$$

4. **Condition aux bords (optionnelle)** : Selon les cas, une condition supplémentaire peut être imposée aux extrémités. On parle d'une condition naturelle :

$$P_1''(x_0) = P_n''(x_n) = 0$$

On définit par la suite la spline cubique qui passe par ces points d'interpolation par:

$$S(x) = \begin{cases} P_0(x) \; si \; x \in [x_0, x_1] \\ P_1(x) \; si \; x \in [x_1, x_2] \\ \vdots \\ P_{n-1}(x) \; si \; x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$

Pour trouver ces polynômes, plutôt que de partir des coefficients de celui-ci définis en (1), nous allons partir de sa dérivée seconde pour des raison pratique.

Nous savons que $P_i(x)$ est de degré 3, donc, sa dérivée seconde est une fonction linéaire de x.

En utilisant une interpolation de Lagrange, on peut écrire sur l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$:

$$P_i''(x) = f_i'' \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} + f_{i+1}'' \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} = -f_i'' \frac{x - x_{i+1}}{h_i} + f_{i+1}'' \frac{x - x_i}{h_i}$$

avec $h_i = x_{i+1} - x_i$.

On intègre ensuite 2 fois par rapport à x, et il va apparaître 2 constantes d'intégrations A_i et B_i :

$$P_i(x) = -f_i'' \frac{(x - x_{i+1})^3}{6h_i} + f_{i+1}'' \frac{(x - x_i)^3}{6h_i} + A_i(x - x_{i+1}) + B_i(x - x_i)$$

En utilisant les conditions d'interpolations suivantes : $P_i(x_i) = f(x_i) = f_i$ et $P_i(x_{i+1}) = f(x_{i+1}) = f_{i+1}$ on trouve :

$$A_i = -\frac{f_i}{h_i} + f_i'' \frac{h_i}{6} \text{ et } B_i = \frac{f_{i+1}}{h_i} - f_{i+1}'' \frac{h_i}{6}$$

Nous avons donc désormais :

$$P_i(x) = -f_i'' \frac{(x - x_{i+1})^3}{6h_i} + f_{i+1}'' \frac{(x - x_i)^3}{6h_i} + \left(-\frac{f_i}{h_i} + f_i'' \frac{h_i}{6}\right)(x - x_{i+1}) + \left(\frac{f_{i+1}}{h_i} - f_{i+1}'' \frac{h_i}{6}\right)(x - x_i)$$

pour $i = 0, \dots, n - 1$.

Nous allons utiliser maintenant la condition de continuité des dérivées premières $P_i'(x_i) = P_{i-1}'(x_i)$ pour $i = 1, \dots, n - 1$.

$$P_i'(x) = -f_i'' \frac{(x - x_{i+1})^2}{2h_i} + f_{i+1}'' \frac{(x - x_i)^2}{2h_i} - \frac{f_i}{h_i} + f_i'' \frac{h_i}{6} + \frac{f_{i+1}}{h_i} - f_{i+1}'' \frac{h_i}{6}$$

$$P_{i-1}'(x) = -f_{i-1}'' \frac{(x - x_i)^2}{2h_{i-1}} + f_i'' \frac{(x - x_{i-1})^2}{2h_{i-1}} - \frac{f_{i-1}}{h_{i-1}} + f_{i-1}'' \frac{h_{i-1}}{6} + \frac{f_i}{h_{i-1}} - f_i'' \frac{h_{i-1}}{6}$$

Ce qui donne :

$$-f_i'' \frac{(x_i - x_{i+1})^2}{2h_i} - \frac{f_i}{h_i} + f_i'' \frac{h_i}{6} + \frac{f_{i+1}}{h_i} - f_{i+1}'' \frac{h_i}{6} = f_i'' \frac{(x_i - x_{i-1})^2}{2h_{i-1}} - \frac{f_{i-1}}{h_{i-1}} + f_{i-1}'' \frac{h_{i-1}}{6} + \frac{f_i}{h_{i-1}} - f_i'' \frac{h_{i-1}}{6}$$

$$\Leftrightarrow -f_i'' \frac{h_i}{2} - \frac{f_i}{h_i} + f_i'' \frac{h_i}{6} + \frac{f_{i+1}}{h_i} - f_{i+1}'' \frac{h_i}{6} = f_i'' \frac{h_{i-1}}{2} - \frac{f_{i-1}}{h_{i-1}} + f_{i-1}'' \frac{h_{i-1}}{6} + \frac{f_i}{h_{i-1}} - f_i'' \frac{h_{i-1}}{6}$$

$$\Leftrightarrow -f_i'' \frac{h_i}{2} + f_i'' \frac{h_i}{6} - f_{i+1}'' \frac{h_i}{6} - f_i'' \frac{h_{i-1}}{2} - f_{i-1}'' \frac{h_{i-1}}{6} + f_i'' \frac{h_{i-1}}{6} = -\frac{f_{i-1}}{h_{i-1}} + \frac{f_i}{h_{i-1}} + \frac{f_i}{h_i} - \frac{f_{i+1}}{h_i}$$
$$\Leftrightarrow -f_{i-1}'' \frac{h_{i-1}}{6} - f_i'' \frac{h_i}{3} - f_i'' \frac{h_{i-1}}{3} - f_{i+1}'' \frac{h_i}{6} = -\frac{f_{i-1}}{h_{i-1}} + \frac{f_i}{h_{i-1}} + \frac{f_i}{h_i} - \frac{f_{i+1}}{h_i}$$

$$\Leftrightarrow f_{i-1}'' \frac{h_{i-1}}{6} + f_i'' (\frac{h_i + h_{i-1}}{3}) + f_{i+1}'' \frac{h_i}{6} = \frac{f_{i+1} - f_i}{h_i} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_{i-1}}$$

On obtient ainsi $n-1$ équations linéaires pour les $n+1$ inconnues que sont les f_i''.
Pour avoir deux équations supplémentaires, nous allons utiliser des conditions aux extrémités x_0 et x_n sur les dérivées secondes :

$$f_0'' = a$$
$$f_n'' = b$$

Si a =b=0, on parle de spline naturelle ou de spline libre.

On peut supposer aussi connu les pentes du polynôme d'interpolation aux deux extrémités.

$$P_0'(x_0) = f_0'$$
$$P_{n-1}'(x_n) = f_n'$$

$$P_0'(x_0) = -f_0'' \frac{(x_0 - x_1)^2}{2h_0} + f_1'' \frac{(x_0 - x_0)^2}{2h_0} - \frac{f_0}{h_0} + f_0'' \frac{h_0}{6} + \frac{f_1}{h_0} - f_1'' \frac{h_0}{6}$$
$$= -f_0'' \frac{h_0}{2} - \frac{f_0}{h_0} + f_0'' \frac{h_0}{6} + \frac{f_1}{h_0} - f_1'' \frac{h_0}{6} = f_0'$$
$$\Leftrightarrow -f_0'' \frac{h_0}{3} - f_1'' \frac{h_0}{6} = -\frac{f_1 - f_0}{h_0} + f_0'$$

$$P_{n-1}'(x_n) = -f_{n-1}'' \frac{(x_n - x_n)^2}{2h_{n-1}} + f_n'' \frac{(x_n - x_{n-1})^2}{2h_{n-1}} - \frac{f_{n-1}}{h_{n-1}} + f_{n-1}'' \frac{h_{n-1}}{6} + \frac{f_n}{h_{n-1}} - f_n'' \frac{h_{n-1}}{6}$$
$$= f_n'' \frac{h_{n-1}}{2} - \frac{f_{n-1}}{h_{n-1}} + f_{n-1}'' \frac{h_{n-1}}{6} + \frac{f_n}{h_{n-1}} - f_n'' \frac{h_{n-1}}{6} = f_n'$$
$$\Leftrightarrow f_n'' \frac{h_{n-1}}{3} + f_{n-1}'' \frac{h_{n-1}}{6} = -\frac{f_n - f_{n-1}}{h_{n-1}} + f_n'$$

L'ensemble de ces $n+1$ équations ainsi obtenues peut se mettre sous forme matricielle :

$$AF = B$$

avec :

$$B = \begin{pmatrix} -\dfrac{f_1 - f_0}{h_0} + f_0' \\ \dfrac{f_2 - f_1}{h_1} - \dfrac{f_1 - f_0}{h_0} \\ \vdots \\ \dfrac{f_{i+1} - f_i}{h_i} - \dfrac{f_i - f_{i-1}}{h_{i-1}} \\ \vdots \\ -\dfrac{f_n - f_{n-1}}{h_{n-1}} + f_n' \end{pmatrix} \; ; \; F = \begin{pmatrix} f_0'' \\ f_1'' \\ \vdots \\ f_i'' \\ \vdots \\ f_n'' \end{pmatrix} \; ;$$

$$F = \begin{pmatrix} -\dfrac{h_0}{3} & -\dfrac{h_0}{6} & 0 & & \dots & 0 & 0 \\ \dfrac{h_0}{6} & \dfrac{h_1 + h_0}{3} & \dfrac{h_1}{6} & & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & \dfrac{h_1}{6} & \dfrac{h_2 + h_1}{3} & & \dfrac{h_2}{6} & \vdots & 0 \\ & & & & \vdots & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{h_{n-2}}{6} & \dfrac{h_{n-1} + h_{n-2}}{3} & & \dfrac{h_{n-1}}{6} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dfrac{h_{n-1}}{6} & \dfrac{h_{n-1}}{3} & \end{pmatrix}$$

$-\dfrac{h_0}{3}$	$-\dfrac{h_0}{6}$	0	$\dots$	0	0
$\dfrac{h_0}{6}$	$\dfrac{h_1 + h_0}{3}$	$\dfrac{h_1}{6}$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
0	$\dfrac{h_1}{6}$	$\dfrac{h_2 + h_1}{3}$	$\dfrac{h_2}{6}$	$\vdots$	$\vdots$
0	0	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dfrac{h_{n-2}}{6}$	$\dfrac{h_{n-1} + h_{n-2}}{3}$	$\dfrac{h_{n-1}}{6}$
0	$\dots$	$\dots$	0	$\dfrac{h_{n-1}}{6}$	$\dfrac{h_{n-1}}{3}$

On remarque que l'on obtient une matrice tridiagonale constituée d'une diagonale principale, d'une diagonale inférieure et d'une diagonale supérieure.

Nous allons voir comme résoudre un système avec une matrice tridiagonale et avoir accès au f_i'' qui nous permettrons de trouver nos polynômes.

III. Résolution d'un système linéaire avec une matrice tridiagonale

Posons un système linéaire se mettant sous la forme matricielle : $AX = S$, où A est une matrice tridiagonale :

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ b_2 & a_2 & c_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & c_3 & \vdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & b_{n-1} & a_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & \dots & b_n & a_n \end{pmatrix}$$

Nous allons factoriser A pour le mettre sous la forme $A = LU$ avec L une matrice triangulaire inférieur et U une matrice triangulaire supérieur :

$$LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ l_2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & l_3 & 1 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & l_{n-1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & l_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 & u_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & v_2 & u_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & v_3 & u_3 & \vdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & v_{n-1} & u_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & v_n \end{pmatrix}$$

L'indentification des coefficients se fait assez simplement :

$$a_1 = v_1$$
$$c_1 = u_1$$
$$c_i = u_i \;\; avec\; 1 \leq i \leq n-1$$
$$b_i = l_i v_{i-1} \; avec\; 2 \leq i \leq n$$
$$a_i = l_i u_{i-1} + v_i \; avec\; 2 \leq i \leq n$$

On obtient ainsi les coefficients rechercher avec un algorithme en 5 étapes :

(1) $v_1 = a_1$
(2) $u_1 = c_1$
(3) $u_i = c_i \;\; avec\; 1 \leq i \leq n-1$
(4) $l_i = \dfrac{b_i}{v_{i-1}} \;\; avec\; 2 \leq i \leq n$
(5) $v_i = a_i - l_i u_{i-1} \;\; avec\; 2 \leq i \leq n$

Résoudre notre système $AX = B$ reviens désormais à résoudre le système $LUX = S$, qui se fait en deux étapes : $LY = S$ (1) et $UX = Y$ (2) selon la méthode suivante :

(1) $y_1 = s_1$
(1) $y_i = s_i - l_i y_{i-1} \;\; avec\; 2 \leq i \leq n$
(2) $x_n = \dfrac{y_i}{v_n}$
(2) $x_i = \dfrac{y_i - u_i x_i}{v_i} \;\; avec\; n-1 \geq n \geq 1$

IV. TP9 Splines cubiques

À l'aide de ce cours, vous allez créer un programme qui permettra de tracé les splines cubiques passant par les points (0 ; 2), (1 ; -2), (2 ; 1), (3, -1) et (4 ; 2).

Vous suivrez bien la méthode du cours.